

Formelsamling

Elektriska kretsar

| Innehållsförteckning | sida |
|---|------|
| Symbolsamling | 2 |
| Formelsamling | |
| 1. Ström, spänning, effekt, energi, potential | 4 |
| 2. Ohms lag, resistans, konduktans | 4 |
| 3. Kirchhoffs lagar, spännings- och strömdelning | 4 |
| 4. Mask- och nodanalys, Cramers regel | 5 |
| 5. Ekvivalenta tvåpoler | 5 |
| 6. Ideal operationsförstärkare | 5 |
| 7. Kapacitans och induktans | 6 |
| 8. Transienter, tidskonstanter | 6 |
| 9. Komplexa spänningar och strömmar, impedans mm | 7 |
| 10. Effekt, komplex effekt, effektivvärde, anpassning | 7 |
| 11. Resonanskretsar | 8 |
| 12. Ideal transformator | 9 |
| 13. Överföringsfunktion, Bodediagram | 10 |

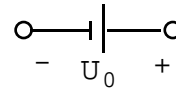
2004
Sheila Galt, Eva Palmberg
Institutionen för Elektromagnetik
Chalmers tekniska högskola

Symbolsamling

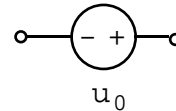
Spänning u och ström i : $\quad + \quad u \quad - \quad ; \quad \rightarrow i$

Aktiva ideala kretselement:

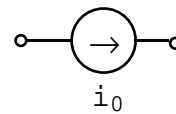
Likspänningskälla



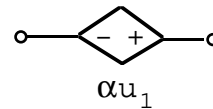
Oberoende spänningskälla



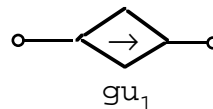
Oberoende strömkälla



Beroende spänningskälla



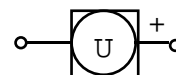
Beroende strömkälla



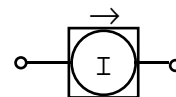
En **beroende** källa **stys** av en spänning eller ström någonstans i kretsen - t.ex. en spänning u_1 för figurerna ovan.

Alternativa beteckningar förekommer:

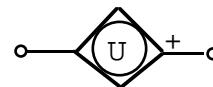
Oberoende spänningskälla



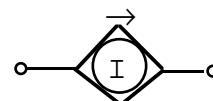
Oberoende strömkälla



Beroende spänningskälla




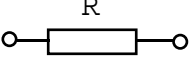
Beroende strömkälla

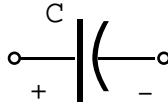
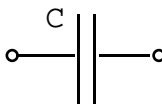


Passiva element:

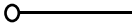
Allmänt kretselement 

Ideala kretselement R, C och L:

Resistans  eller 


Kapacitans  eller 

Induktans 

Anslutningspunkt 


Kontaktpunkt 

Korsning utan kontakt  eller 

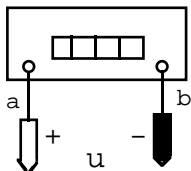
Anslutning till jord 

Instrument

Ideal voltmeter 

Ideal amperemeter 

Alternativ för ideala digitala volt- och amperemetrar
(Dorf/Svoboda)



Digital voltmeter
Visar spänning u med + vid a

Motsvarande för digital amperemeter: Visar ström i med referensriktning **in** vid a.

1. Ström, spänning, effekt, energi

ström $i = dq/dt$; $q =$ laddning

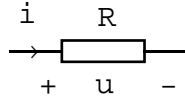
spänning $u = dw/dq$

effekt $p = u \cdot i = dw/dt$; $w =$ energi

spänning $u = v_A - v_B =$ potentialskillnad; $v =$ potential

2. Ohms lag, resistans (linjära kretsar)

$$\begin{cases} u = R i \\ i = G u \end{cases}$$



Resistans R

Konduktans $G = 1/R$

Resistans för en homogen rak ledare med längden L , tvärsnittsytan A och resistiviteten ρ : $R = \rho L/A$.

Effekt i resistans $p = Ri^2 = u^2/R$

3. Kirchhoffs lagar, spännings-/strömdelning

Kirchhoffs strömlag (KCL): $\sum i_k = 0$ i nod;

Kirchhoffs spänningslag (KVL): $\sum u_k = 0$ i slinga;

Seriekopplade resistanser $R_s = \sum_n R_n$

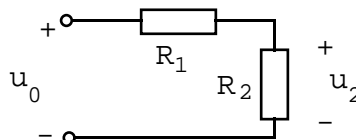
Parallellkopplade resistanser $G_p = \sum_n G_n$

eller med R : $\frac{1}{R_p} = \sum_n \frac{1}{R_n}$

Specialfall ($n=2$): $R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$

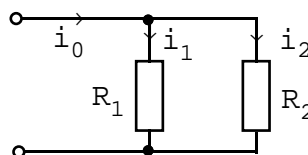
Spänningsdelning

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_0$$



Strömdelning

$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_0$$



4. Mask- och nodanalys. Cramers regel

Maskanalys: matrisekvation $\mathbf{R}_m \mathbf{i} = \mathbf{u}_0$

\mathbf{R}_m = maskresistansmatris, \mathbf{i} = maskströmvektor,

\mathbf{u}_0 = spänningskällevektor

Element i resistansmatrisen: $R_{11} = \sum R$ i maska 1;

$R_{12} = R_{21} = -\sum R$ gemensamma för maska 1 och 2; o.s.v.

Nodanalys: matrisekvation $\mathbf{G}_n \mathbf{v} = \mathbf{i}_o$

\mathbf{G}_n nodkonduktansmatris, \mathbf{v} = nodpotentialvektor,

\mathbf{i}_o strömkällevektor

Element i konduktansmatrisen: $G_{11} = \sum G$ i grenar anslutna till

nod 1; $G_{12} = G_{21} = -\sum G$ anslutna direkt mellan nod 1 och nod 2;

o.s.v.

Cramers regel:

$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$; med lösning $x_k = \Delta_k / \Delta$,

där Δ = determinanten av \mathbf{A} och Δ_k = determinanten av \mathbf{A} med kolumn k utbytt mot b.

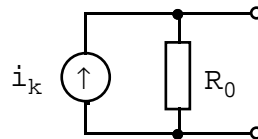
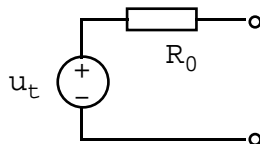
Determinant av 2x2-matris:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

3x3-matris:

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{23}a_{32}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

5. Ekvivalenta tvåpoler



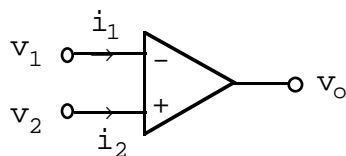
$$R_0 = u_t / i_k$$

Thévenins respektive Nortons ekvivalenta tvåpoler

u_t = tomgångsspänning, i_k = kortslutningsström

Anpassning: $R_L = R_0$ (rent resistiva kretsar)

6. Ideal operationsförstärkare



$$v_1 = v_2; \quad i_1 = i_2 = 0$$

7. Kapacitans och induktans

6

Kapacitans: ström-spänningsberoende $i(t) = C \, du/dt$

lagrad **energi** $w_C = \frac{1}{2} C u^2$

Parallell- respektive seriekopplade kapacitanser utan begynnelseenergi(=begynnelsepotentialer):

$$C_p = \sum_n C_n; \quad \frac{1}{C_s} = \sum_n \frac{1}{C_n}$$

Induktans: ström-spänningsberoende $u(t) = L \, di/dt$

lagrad **energi** $w_L = \frac{1}{2} L i^2$

Parallell- respektive seriekopplade induktanser utan begynnelseenergi(=begynnelseströmmar):

$$\frac{1}{L_p} = \sum_n \frac{1}{L_n}; \quad L_s = \sum_n L_n$$

8. Transienter, tidskonstanter

(första ordningens kretsar med tidskonstanta källor)

KVL, KCL leder till inhomogena differentialekvationer för u eller i av formen

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau} u(t) = \frac{U_0}{\tau} \quad \text{med } U_0 = \text{konst och } \tau = \text{en tidskonstant}$$

Ansätt lösningen $u(t) = k_1 + k_2 e^{-t/\tau}$

k_1 och k_2 är konstanter som bestäms ur diff.ekv. och begynnelsevillkor.

[k_1 = partikulär lösning (stationär lösning)

$k_2 e^{-t/\tau}$ = lösning till homogena diff.ekv. (transient lösning)]

Specialfall:

RC-kretsen: $\tau = RC$; RL-kretsen: $\tau = L/R$

Addition av sinustermer

$$\sum_{i=1}^N A_i \sin(\omega t + \alpha_i) = A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{Y}{X}\right)$$

$$X = \sum_{i=1}^N A_i \cos \alpha_i, \quad Y = \sum_{i=1}^N A_i \sin \alpha_i$$

9. Komplexa spänningar och strömmar, impedans

$$u(t) = \hat{U} \sin(\omega t + \alpha) = \text{Im}\{\hat{U} e^{j(\omega t + \alpha)}\}$$

\hat{U} : Amplitud, $\omega (= 2\pi f)$: vinkelfrekvens, α : fas

där den komplexa spänningen: $\bar{U} = \hat{U} e^{j(\omega t + \alpha)}$

Komplex impedans

$$\bar{Z} = \bar{U} / \bar{I}$$

a) Resistor

$$\bar{Z}_R = R$$

b) Kondensator

$$\bar{Z}_C = 1/(j\omega C)$$

c) Spole

$$\bar{Z}_L = j\omega L$$

Komplexa tal

Rektangulär form: $c = a + jb$

Polär form: $c = |c|e^{j\theta}$; $j = \sqrt{-1}$

där $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$, och $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

10: Effekt, komplex effekt, effektivvärde, anpassning

Ögonblicksvärde(momentanvärde) av effekt: $p(t) = u(t)i(t)$

Medeleffekt: $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$; T: periodtiden

1) DC

$$\text{Effekt } P = IU = I^2 R = U^2 / R$$

2) AC(sinusformad växelström)

$$\text{Effekt } P = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} \cos(\beta - \alpha)$$

\hat{U} :Spänningens amplitud, \hat{I} : Strömmens amplitud, β : spänningens fasvinkel,
 α : strömmens fasvinkel

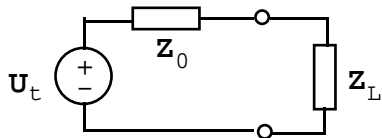
$$\text{induktiv last} \quad \beta - \alpha > 0$$

$$\text{kapacitiv last} \quad \beta - \alpha < 0$$

Effektivvärde

$$I_{\text{eff}} = I_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T [i(t)]^2 dt} \quad (\text{rms} = \text{root mean square})$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_m \quad \text{för sinusformad växelström}$$

Anpassning

Maximal effekt P_L i belastningen Z_L för

1/ $Z_L = Z_0^*$ om $Z_L = R_L + jX_L$ kan **väljas fritt**; *=komplexkonjugat

2/ $|Z_L| = |Z_0|$ om enbart $|Z_L|$ kan varieras

Andra fall av anpassning: Teckna P_L och kolla villkoren för $P_{L\text{max}}$!

11. Resonanskretsar

Resonans för tvåpol för $\omega = \omega_0$, när $\text{Im}\{Z(\omega)\} = 0$; $\Rightarrow \text{Im}\{Y(\omega)\} = 0$

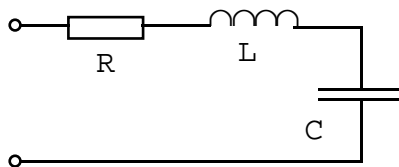
resonansvinkelfrekvens ω_0

Q-värde, godhetstal; beräknas vid ω_0 :

$$Q = 2\pi \frac{\text{medelvärde av lagrad energi (i kapacitanser och induktanser)}}{\text{per period förlorad energi (i resistanser)}}$$

Specialfall:

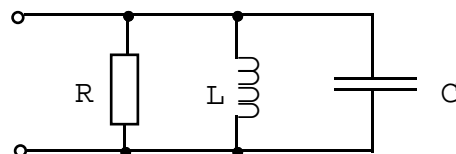
Seriekrets



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_s = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

Parallellkrets



$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q_p = \frac{R}{\omega_0 L} = \omega_0 RC$$

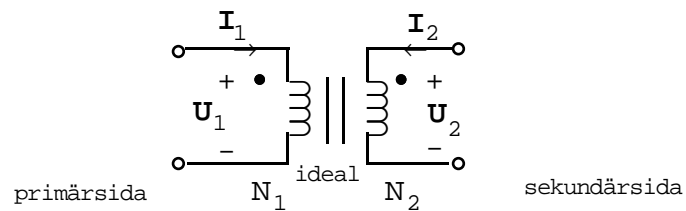
forts. på nästa sida

bandbredd $BW = \omega_2 - \omega_1$; $BW = \frac{\omega_0}{Q}$; $\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2$

där ω_1 och ω_2 är vinkelfrekvenser vid halveffektpunkterna.
Gäller för både seriekretsen och parallellkretsen ovan.

Andra tvåpoler: Använd $\text{Im}\{\mathbf{Z}(\omega)\}=0$ för att bestämma ω_0 och den allmänna definitionen av Q-värde ovan för Q.

12. Ideal transformator



$$\frac{U_1}{N_1} = \frac{U_2}{N_2} ; \quad N_1 I_1 + N_2 I_2 = 0$$

omsättningstal $n = N_1/N_2$ (definieras ibland som N_2/N_1)

impedanstransformering till primärsidan $\mathbf{Z}_1 = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \mathbf{Z}_2$

13. Överföringsfunktion, Bodediagram

Överföringsfunktion
$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathbf{Y}(j\omega)}{\mathbf{X}(j\omega)}$$

där $\mathbf{X}(j\omega)$ = komplex insignal och $\mathbf{Y}(j\omega)$ = komplex utsignal, d.v.s. \mathbf{X} och \mathbf{Y} representerar komplexa spänningar eller strömmar.

förstärkning $H(\omega) = |\mathbf{H}(j\omega)|$

fasskift $\varphi(\omega) = \angle\mathbf{H}(j\omega)$

frekvenssvar: Att beräkna och /eller skissa $H(\omega)$ och $\varphi(\omega)$ som funktion av ω eller f .

Logaritmisk förstärkning $20 \cdot 10 \log |\mathbf{H}(j\omega)|$ (dB)

Bodediagram: Att skissa $|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}}$ och $\angle\mathbf{H}(j\omega)$ som funktion av ω med logaritmisk skala på ω -axeln.

[**Stegsvar:** Lägg ett enhetssteg $u(t)$, t.ex. $v_{\text{in}}(t) = 1 \cdot u(t)$ V, på ingången vid $t=0$ och bestäm utsignalen, t.ex. $v_{\text{ut}}(t)$.

- Att studera transienterna på utgången med en spänningskälla på 1 V på ingången inkopplad vid $t=0$.]